1 Introdução e premissas

O **Método Simplex** é aplicado em um sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \text{ z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

E tem por objetivo encontrar valores de x que satisfaçam as equações, minimizando a função z.O Método Simplex é composto de 2 etapas: **Simplex Fase I** e **Simplex Fase II**. Por mais contra-intuitivo que possa parecer, começaremos pelo algoritmo **Simplex Fase II**.

Para entendermos como o algoritmo Simplex Fase II funciona, precisamos retomar o conceito de **sistemas canônicos**:

Um sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

É dito canônico em relação às variáveis x_B, se o mesmo pode ser reescrito como:

$$\mathbf{I}x_B + \bar{A}x_N = \mathbf{b}$$

Dessa forma, o algoritmo possui 3 premissas para que possa começar a ser executado:

1. sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a x_B. ✓
3. O sistema deve ter uma **solução básica factível** (???).

Já sabemos como transformar um sistema na forma padrão:

1. Função objetivo → minimização
2. Restrições → equações
3. b → ≥ 0

Sabemos que por meio do **pivoteamento** conseguimos deixar o sistema na forma canônica

$$\mathbf{I}x_B + \bar{A}x_N = \mathbf{b}$$

Não sabemos o que é uma **solução básica factível!** Para continuarmos, precisamos entender o que é uma **solução básica**, e o que é uma **solução básica factível**.

Def. 1.1 Solução básica/ básica factível

Solução básica: Uma *solução básica* de um sistema linear de equações, consiste em zerar as variáveis independentes, chamadas de variáveis não básicas ($x_N = 0$), e resolver o sistema pelas variáveis básicas (x_B). Se o sistema está na forma canônica, temos que $x_N = 0$ e $x_B = b$.

Ou seja, se o sistema já está na forma canônica, uma **solução básica** nada mais é do que o método que já estamos usando para resolver sistemas!

$$\mathbf{I}\underbrace{x_B}_{b} + \bar{A}\underbrace{x_N}_{0} = \mathbf{b}$$

EXEMPLO O sistema abaixo possui uma **solução básica trivial**? Se sim, indique quais são as variáveis básicas (x_B) e as não básicas (x_N), escrevendo o sistema na forma canônica.

$$\begin{array}{cccccl} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

se reescrevermos o sistema na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

Rearranjando os termos, temos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 120 \\ 40 \\ 30 \end{bmatrix}}_{b}$$

Portanto temos as variáveis **básicas** $x_B^T = (x_3, x_4, x_5)$ e as **não básicas** $x_N^T = (x_1, x_2)$.

Para termos uma solução básica, fazemos: $x_N = 0$, resultando em $x_B = b$. Assim, a solução básica fica:

$$\begin{cases} \text{Var. básicas} = x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)^T \\ \text{Var. não básicas} = x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)^T \end{cases}$$

Ja sabemos o que é uma **solução básica**. Agora precisamos entender o que é uma **solução básica factível**.

Def. 1.2

Solução básica factível **Solução básica factível:** Se uma solução básica ($x_B = b$ e $x_N = 0$) satisfaz a restrição de não negatividade das variáveis ($x_B = b \geq 0$), então ela é dita uma solução básica factível (SBF).

EXEMPLO A solução básica encontrada do sistema anterior é uma SBF?
Obtivemos a seguinte solução básica:

$$\begin{cases} \text{Var. básicas} = x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)^T \\ \text{Var. não básicas} = x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)^T \end{cases}$$

Como $x_B^T \geq 0$, então ela é uma SBF.
EXEMPLO Verifique se a solução básica em relação às variáveis $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$ é uma SBF.

$$\begin{array}{lllllr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & +x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

Para deixar o sistema na forma canônica em relação a $x_B^T = (x_2, x_4, x_5)$, fazemos as seguintes operações nas linhas:

1. $L_1 \to L_1/3$
2. $L_3 \to L_3 - L_1$

O que resulta em:

$$\begin{array}{lllllr} 2/3x_1 & +x_2 & +1/3x_3 & & & = 40 \\ x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ \text{-}2/3x_1 & & \text{-}1/3x_3 & & +x_5 & = \text{-}10 \end{array}$$

Reescrevendo na forma matricial canônica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}}_{x_B} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x_N} = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -10 \end{bmatrix}}_{b}$$

Para ser uma solução básica, $x_N = 0$, o que implica $x_B = b$, com $x_B^T = (40, 40, -10)$. Como $x_5 < 0$, a solução não é uma SBF.

2 A ideia geral do método

Já entendemos todas as premissas para a execução do algoritmo (Fase II):

1. O sistema (restrições + fo) deve estar na **forma padrão.** ✓
2. O sistema deve estar na **forma canônica** em relação a x_B. ✓
3. O sistema deve ter uma **SBF** ✓.

O algoritmo opera no sistema, alterando a SBF de uma iteração a outra, sempre melhorando (ou mantendo constante) o valor da função objetivo, até o momento em que nenhuma melhoria seja possível.

Podemos analisar o Simplex **algébrica** e **geometricamente**. A álgebra nos fornece a intuição do algoritmo, entendida a intuição, veremos a **forma tabular** de organização dos dados, para facilitar o processamento (e o algoritmo é aplicado na tabela). A forma geométrica nos indica como o Simplex "caminha" na região factível até encontrar a solução ótima (diferente do método gráfico).

3 A intuição algébrica

Considere o seguinte modelo de PL:

$$\begin{array}{rlll} \max \text{ z} = & 100x_1 & +150x_2 & \\ & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\ & x_1 & & \leq 40 \\ & & x_2 & \leq 30 \\ & x_1 & x_2 & \geq 0 \end{array}$$

Passando para a forma padrão, temos (sem escrever a não negatividade):

$$\begin{array}{rllllll} \min \text{ z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

Por conveniência, tratamos a função objetivo como uma **restrição**. Tratamos z como uma variável:

$$\begin{array}{rllllll} \text{z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

E o conjunto de equações fica então:

$$\begin{array}{rllllll} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{rlllllll} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 & \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 & \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \end{array}$$

Note que já temos uma **SBF**, com $x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30)$ e $x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$.

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. Já x_2 a uma taxa de -150. $\therefore$ é mais vantajoso tentar aumentar o valor de x_2 (deixaria de ser 0).

Mas, até que ponto podemos aumentar x_2?

$$\begin{array}{rrrrrrl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV} \end{array}$$

Uma aumento em x_2 vai afetar as outras restrições, de forma que o valor máximo a que podemos chegar é **limitado pela satisfação da restrição de não negatividade das variáveis básicas**. Avaliamos essa influência de x_2 reescrevendo as equações que são influenciadas em função do próprio x_2:

$$\begin{cases} (II) : x_3 = 120 - 3x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 40 \\ (IV) : x_5 = 30 - x_2 \geq 0 \rightarrow x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Como x_B deve ser ≥ 0, impomos a condição na análise. Assim, temos o limitante de x_2 em 30 unidade (com $x_5 = 0$). Se mais for acrescentado, a variável x_5 fica negativa.

$$\begin{array}{rrrrrrl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV} \end{array}$$

Note que se fizermos $x_2 = 30$, $x_5 = 0$, ou seja, estamos **trocando as variáveis básicas e não básicas** da nossa solução:

$$\begin{cases} \text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_5), x_N^T = (x_1, x_2) \\ \text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \end{cases}$$

Agora, só precisamos atualizar o sistema de equações para que ele fique na **forma canônica** em relação às novas variáveis básicas $x_B^T = (x_3, x_4, x_2)$.

$$\begin{array}{rrrrrrl} -z & -100x_1 & -150x_2 & & & & = 0 \quad \text{I} \\ & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \quad \text{II} \\ & x_1 & & & +x_4 & & = 40 \quad \text{III} \\ & & x_2 & & & +x_5 & = 30 \quad \text{IV} \end{array}$$

Como x_3 e x_4 já estão na forma correta, só precisamos executar o pivoteamento no elemento x_2 (da equação IV). Para isso fazemos as seguintes operações nas linhas:

1. $L_1 \leftarrow L_1 + 150L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_4$

O sistema atualizado fica:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV}
\end{array}
$$

Temos então uma nova **SBF**. Note também que podemos extrair o valor da função objetivo para essa nova solução simplesmente olhando o valor da variável z em I (não se esqueça que o valor do lado direito é o **negativo de z**!)

$$
\begin{cases}
\text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_5), x_N^T = (x_1, x_2), z = 0 \\
\text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5), z = -4500
\end{cases}
$$

Essa foi a primeira iteração do algoritmo Simplex Fase II. Agora, continuamos verificando se podemos melhorar a fo (minimizá-la).

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\hline
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \\
\hline
\end{array}
$$

Observando a equação I, percebe-se que se aumentarmos x_1 em 1 unidade, mantendo as outras variáveis da mesma forma, a fo decresce a uma taxa de -100 unidades. O acréscimo em qualquer outra variável resulta em um aumento na fo, de forma que escolhemos x_1. Verificando as condições para o limite no aumento de x_1, temos:

$$
\begin{cases}
(II): & x_3 = 30 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 15 \\
(III): & x_4 = 40 - x_1 \geq 0 \rightarrow x_1 \leq 40
\end{cases}
$$

Temos então um limitante para x_1 em 15 unidades. Quando x_1 atingir esse valor, x_3 passa a ser 0. Ou seja, novamente alteramos as variáveis x_B e x_N.

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
\hline
-z & -100x_1 & & & & 150x_5 & = 4500 & \text{I} \\
 & 2x_1 & & +x_3 & & -3x_5 & = 30 & \text{II} \\
 & x_1 & & & +x_4 & & = 40 & \text{III} \\
 & & x_2 & & & +x_5 & = 30 & \text{IV} \\
\hline
\end{array}
$$

Comparando as variáveis básicas e não básicas temos então:

$$
\begin{cases}
\text{ANTES}: & x_B^T = (x_3, x_4, x_2), x_N^T = (x_1, x_5) \\
\text{DEPOIS}: & x_B^T = (x_1, x_4, x_2), x_N^T = (x_3, x_5)
\end{cases}
$$

Para deixarmos o sistema na forma canônica em relação ao novo conjunto $x_B^T = (x_1, x_4, x_2)$ executamos as seguintes operações:

1. $L_2 \leftarrow L_2/2$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 100L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$-z$			$+50x_3$			$= 6000$	I
	x_1		$+x_3/2$		$-3/2x_5$	$= 15$	II
			$-x_3/2$	$+x_4$	$3/2x_5$	$= 25$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

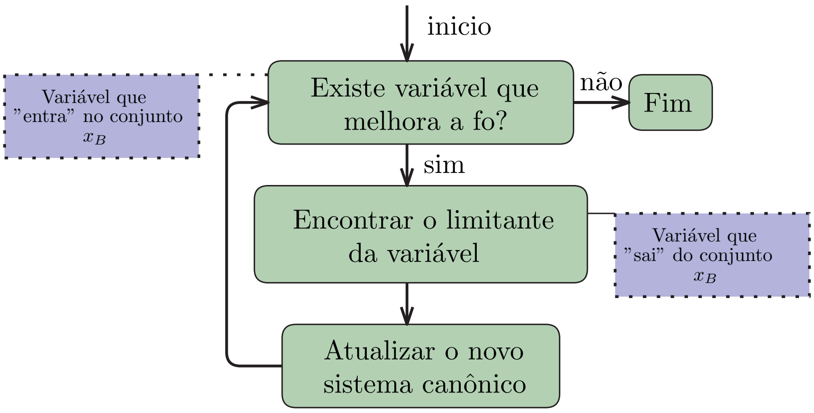
$-z$			$+50x_3$			$= 6000$	I
	x_1		$+x_3/2$		$-3/2x_5$	$= 15$	II
			$-x_3/2$	$+x_4$	$3/2x_5$	$= 25$	III
		x_2			$+x_5$	$= 30$	IV

Após a atualização do sistema, temos a seguinte **SBF**:

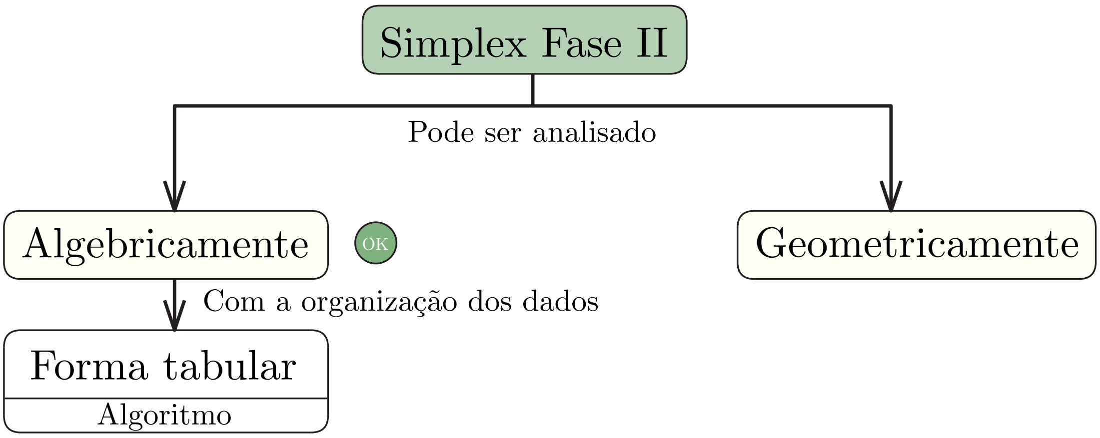
$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

Se olharmos a equação I, vemos que não existe mais nenhuma variável que ao ser incrementada decrementa o valor de z, **portanto, a solução atual é ótima**!

Essa é a **álgebra** por trás do método Simplex Fase II. As etapas que executamos podem ser visualizadas como um fluxograma na imagem abaixo.



Embora esse **já seja o algoritmo Simplex Fase II**, para aplicarmos de forma sistemática e algorítmica (sequência de passos), é conveniente olhar somente para os coeficientes das equações, e escrevê-las de uma forma que fique evidente a cada passo **quais são as variáveis básicas e as não básicas**.



4 Simplex na forma tabular

Por conveniência podemos escrever os dados do sistema canônico inicial (já na forma padrão) em uma tabela com os coeficientes das variáveis. O sistema original é:

$$
\begin{aligned}
\min \text{ z} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\
\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

E a tabela de dados fica da forma:

VB	-z	x_1	x_2	...	x_n	b
	1	c_1	c_2	...	c_n	-z
x_B	0	a_1	a_2	...	a_n	b

	VB	-z	x_1	x_2	...	x_n	b	
	VB	-z	x_1	x_2	...	x_n	b	$\longleftarrow$ cabeçalho
		1	c_1	c_2	...	c_n	-z	$\longleftarrow$ coef. da fo
variáveis atualmente em x_B $\longrightarrow$	x_B	0	a_1	a_2	...	a_n	b	$\longleftarrow$ vetor b
			colunas da matriz A					

EXEMPLO Escreva o modelo do exemplo anterior na forma tabular:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\min \text{ z} = & -100x_1 & -150x_2 & & & & \\
& 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & & = 120 \\
& x_1 & & & +x_4 & & = 40 \\
& & x_2 & & & +x_5 & = 30
\end{array}
$$

O modelo fica da forma:

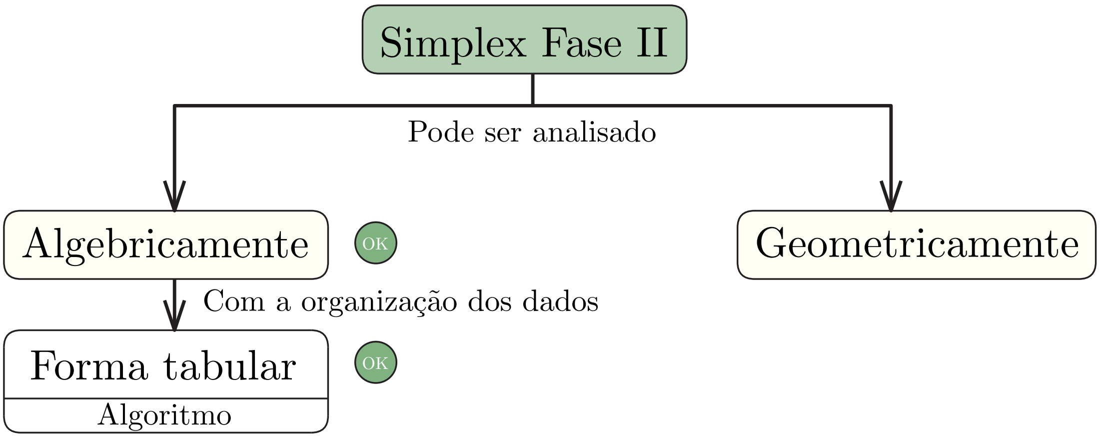
VB	-z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	-100	-150	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	120
x_4	0	1	0	0	1	0	40
x_5	0	0	1	0	0	1	30

Na prática, não usamos a coluna de -z.

VB	-z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	-100	-150	0	0	0	0
x_3	0	2	3	1	0	0	120
x_4	0	1	0	0	1	0	40
x_5	0	0	1	0	0	1	30

De forma que podemos escrever a tabela **sem a coluna**.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30



4.1 O Algoritmo Simplex Fase II

Com os dados na forma tabular, podemos definir o Algoritmo Simplex Fase II formalmente. Considerando a seguinte notação:

$$\begin{cases} A_{\bullet s}\text{: Todas as linhas da coluna } s \\ a_{rs}\text{ : Elemento da linha } r \text{ e coluna } s \end{cases}$$

O algoritmo fica então:

1. (Menor custo reduzido): encontre

$$s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{argmin}\ c_j$$

em que s é o índice da coluna em que c_j é mínimo:

$$c_s = \underset{\{\forall j \in 1,\ldots,n\}}{min}\ c_j$$

2. (Teste de otimalidade): se $c_s \geq 0$ PARE. Solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se $c_s < 0$, s é o índice da variável que entra na base.
4. (Teste da solução ilimitada): se $A_{\bullet s} \leq 0$ PARE; o problema é ilimitado.
5. (Variável que sai da base): a variável básica atual da linha r que sai da base (linha do mínimo), e o valor da variável x_s que entra na base é dado por:

$$x_s = \underset{\{\forall a_{is} > 0, i=1,\ldots,m\}}{min} \frac{b_i}{a_{is}}$$

6. (Atualização da tabela): faça o pivoteamento da tabela com o elemento a_{rs} como pivô. Atualize as variáveis básicas na primeira coluna e volte para o passo 1.

O Algoritmo Simplex Fase II descrito de forma "enunciada"ficaria:

1. (Menor custo reduzido): olhe para a linha dos coeficientes da função objetivo, e selecione o menor de todos.
2. (Teste de otimalidade): se o coeficiente selecionado for positivo ou nulo, o método chegou ao fim, e a solução atual é ótima.
3. (Variável que entra na base): se o coeficiente for negativo, a variável referente a coluna desse coeficiente é a que vai fazer parte da nova base (entra na base).
4. (Teste da solução ilimitada): olhando para os coeficientes de todas as linhas na coluna da variável que entra na base (somente nas restrições), se nenhum valor for estritamente positivo (> 0), o problema não tem solução limitada (fim).
5. (Variável que sai da base): considerando todos os valores da coluna da variável que entra na base *que são positivos*, e todos os valores do lado direito das equações, faça a divisão dos valores do lado direito (b) pelos coeficientes positivos. Selecione a linha que mantiver a menor razão. Olhando para as variáveis atualmente básicas, essa é a variável que vai sair da base.
6. (Atualização da tabela): atualize a tabela na forma padrão (pivoteamento) substituindo a variável encontrada em 3 pela encontrada em 5 em x_B. Voltar ao passo 1.

EXEMPLO Resolva o modelo abaixo, pelo algoritmo Simplex:

$$\begin{array}{lccc}
\max z = & 100x_1 & +150x_2 & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\
 & x_1 & & \leq 40 \\
 & & x_2 & \leq 30 \\
 & x_1 & x_2 & \geq 0
\end{array}$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Colocando o modelo na forma padrão e tabular.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

Com mínimo $c_s = -150$, e $s = 2$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, -150, 0, 0, 0\}$$

Com mínimo $c_s = -100$, e $s = 2$.

Como $c_s < 0$, a solução atual não é ótima, portanto continuamos com o algoritmo.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Sabemos que a variável x_2 vai **entrar para a base** x_B^T (vai deixar de ter valor 0).

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Nesse caso, temos que

$$A_{\bullet s} = A_{\bullet 2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} > 0$$

Portanto, o problema **não é ilimitado**[1], e continuamos o algoritmo.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Temos então que escolher o mínimo dentre os elementos do conjunto

$$x_2 = \left\{ \frac{120}{3}, \frac{30}{1} \right\} = 30$$

Com $r = 4$. Sabemos então que x_2 vai entrar para a base (x_B) com valor de 30, e x_5 vai deixar de fazer parte da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Temos o elemento $a_{r,s} = a_{4,2} = 1$ como pivô. Precisamos realizar o pivoteamento para deixar a tabela canônica. Para isso realizamos as seguintes operações (sempre usando a linha do elemento pivô! primeiro transforme o elemento em 1 e depois use a linha para zerar os outros elementos da coluna):

1. $L_1 \leftarrow L_1 + 150L_4$
2. $L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

[1] para que $A_{\bullet s} \leq 0$, todos os elementos do vetor devem ser ≤ 0

A tabela atualizada fica da seguinte forma. Note que atualizamos a coluna das variáveis básicas: removemos x_5 e adicionamos x_2. A solução atual é:

$$x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0), z = -4500$$

OBS: Note que para coletarmos o valor de z da tabela devemos pegar o seu negativo!

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Essa foi a primeira iteração completa do algoritmo, continuando novamente a partir do primeiro passo.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Olhando todos elementos c_j, temos o conjunto:

$$\{-100, 0, 0, 0, 150\}$$

Com mínimo c_s= -100, e s = 1. Como $c_1 < 0$ continuamos.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Novamente temos $A_{\bullet s} > 0 \therefore$ o problema não é ilimitado.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Temos então que escolher o mínimo dentre os elementos do conjunto

$$x_1 = \left\{\frac{30}{2}, \frac{40}{1}\right\} = 15$$

Com $r = 2$. Sabemos então que x_1 vai entrar para a base (x_B) com valor de 15, e x_3 vai deixar de fazer parte da base.

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Temos $a_{2,1} = 2$ o novo elemento pivô, para atualizarmos a tabela fazemos as seguintes operações nas linhas:

1. $L_2 \leftarrow L_2/2$
2. $L_1 \leftarrow L_1 + 100L_2$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

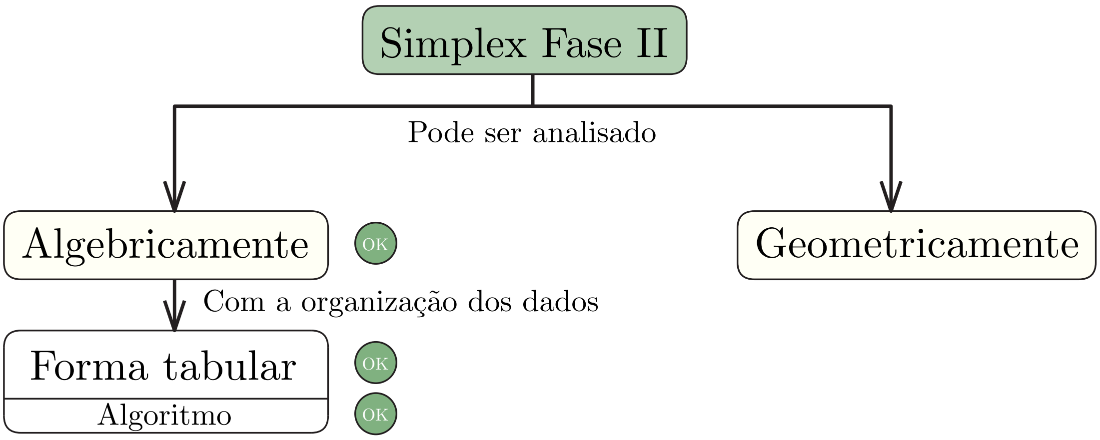
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	50	0	0	6000
x_1	1	0	1/2	0	-3/2	15
x_4	0	0	-1/2	1	3/2	25
x_2	0	1	0	0	1	30

A nova tabela atualizada fica então da seguinte forma.

Como todos os valores de $c^T \geq 0$, podemos parar. A solução atual é a solução **ótima**:

$$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0), z = -6000$$

Com isso finalizamos o algoritmo Simplex Fase II.



EXERCÍCIO Resolva o seguinte PL (forma tabular), mostrando a cada iteração a relação existente com o método algébrico.

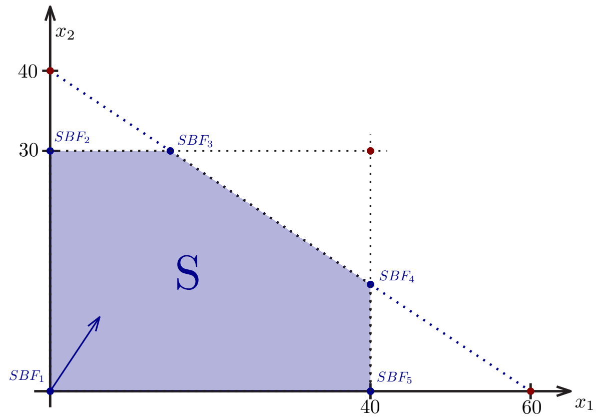
$$\begin{array}{lcccc}
\text{max z} = & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq 6 \\
 & x_1 & x_2 & & \geq 0
\end{array}$$

Quando aprendemos a resolver PLs pelo **método gráfico**, conseguimos compreender melhor o motivo da solução ótima estar em determinado ponto (visualmente). O algoritmo Simplex também segue uma **lógica geométrica**, e é muito importante que a entendamos para seguir em frente no curso.

Considere a propriedade:

Prop. 4.1

Considere uma região factível $S = \{x \in R^+ | Ax = b, x \geq 0\}$. Um ponto $x \in S$ é um vértice de S se e somente se, x **for uma SBF**.



Ou seja, essa propriedade mostra o que são as SBF geometricamente, em relação a região factível: **vértices** formados pelas intersecções das restrições.

E ainda:

Prop. 4.2

Se um problema de PL têm solução ótima, então **existe um vértice ótimo**.

A segunda propriedade nos garante que sempre que um problema tiver uma solução ótima, poderemos encontrar um vértice da região factível S com essa solução.

1. Sabemos que o Simplex Fase II precisa de uma **SBF** para iniciar.
2. Sabemos como o Simplex funciona: a cada iteração ele altera valores da solução, sempre gerando uma nova **SBF**.
3. Sabemos pela prop. 1 que toda **SBF** é um vértice da região factível.
4. $\therefore$ por 1,2 e 3 sabemos que o método Simplex "caminha" pelos vértices da região factível (**SBF**) até chegar ao vértice ótimo.

Esse percurso que o algoritmo percorre na região factível até chegar no vértice ótimo é chamado de **caminho Simplex**.

EXEMPLO Encontre o caminho Simplex para o exemplo resolvido anteriormente.

$$
\begin{array}{rccl}
\max z = & 100x_1 & +150x_2 & \\
 & 2x_1 & +3x_2 & \leq 120 \\
 & x_1 & & \leq 40 \\
 & & x_2 & \leq 30 \\
 & x_1 & x_2 & \geq 0
\end{array}
$$

As tabelas ao fim de cada iteração são mostradas abaixo.

Tabela inicial

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	-150	0	0	0	0
x_3	2	3	1	0	0	120
x_4	1	0	0	1	0	40
x_5	0	1	0	0	1	30

Iteração 1

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	-100	0	0	0	150	4500
x_3	2	0	1	0	-3	30
x_4	1	0	0	1	0	40
x_2	0	1	0	0	1	30

Iteração 2

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	0	0	50	0	0	6000
x_1	1	0	1/2	0	-3/2	15
x_4	0	0	-1/2	1	3/2	25
x_2	0	1	0	0	1	30

Para encontrar o caminho Simplex, precisamos da **SBF** a cada iteração.

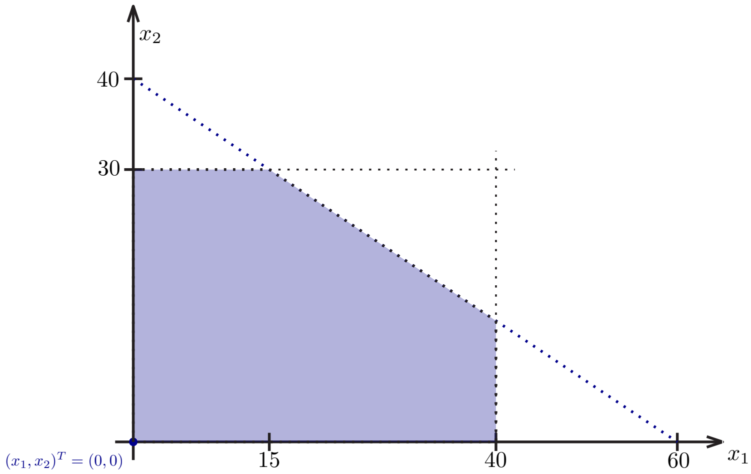
$$
\begin{cases}
\text{Início:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\
\text{Iter. 1:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\
\text{Iter. 2:} & x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)
\end{cases}
$$

As soluções são mostradas abaixo:

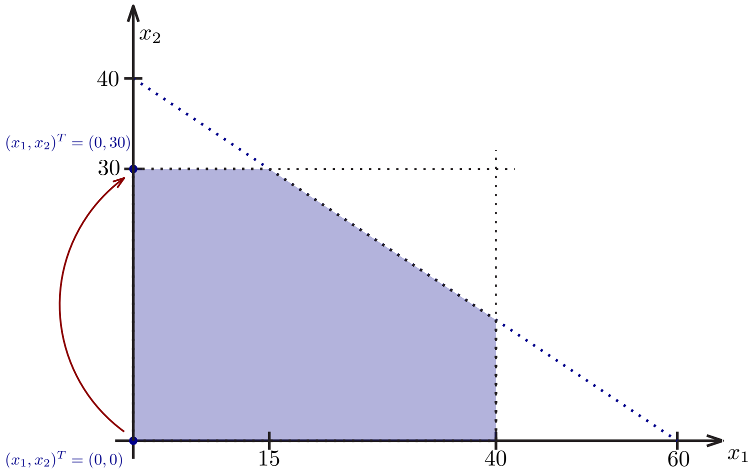
Lembrando que as variáveis de folga não aparecem no gráfico da região factível, de forma que só estamos interessados nos valores das variáveis originais do modelo (x_1 e x_2).

$$\begin{cases} \text{Início:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0) \\ \text{Iter. 1:} & x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0) \\ \text{Iter. 2:} & x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0) \end{cases}$$

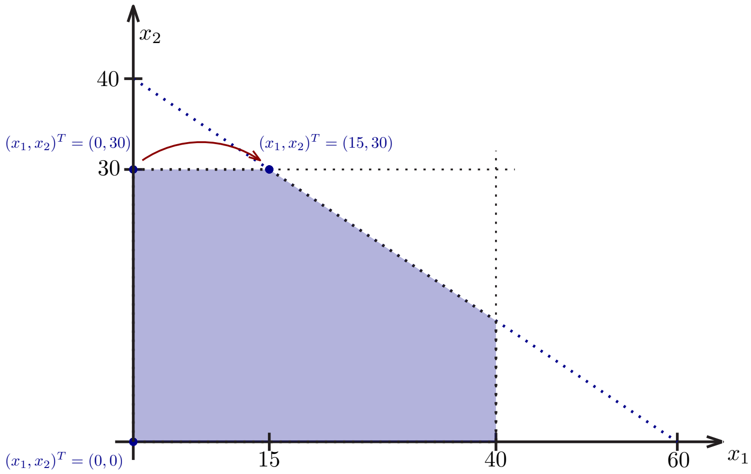
Vamos verificar no gráfico onde estão estas soluções



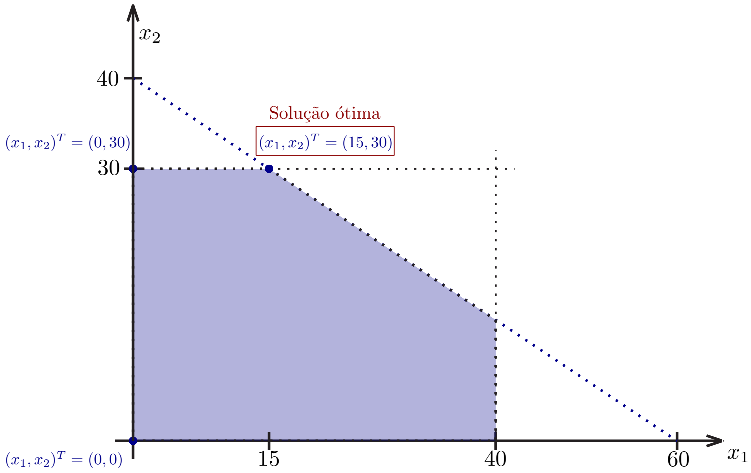
Início:$x_B^T = (x_3, x_4, x_5) = (120, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_2) = (0, 0)$



Iter. 1:$x_B^T = (x_3, x_4, x_2) = (30, 40, 30), x_N^T = (x_1, x_5) = (0, 0)$

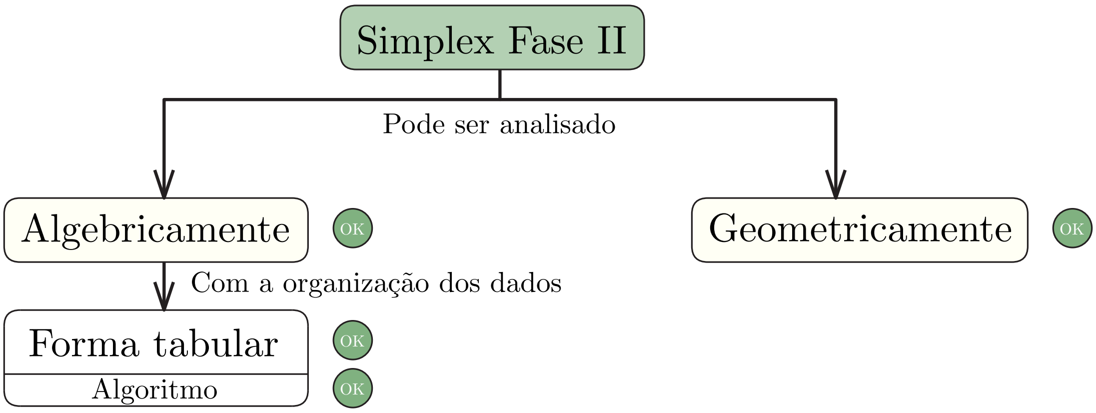


Iter. 2:$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$



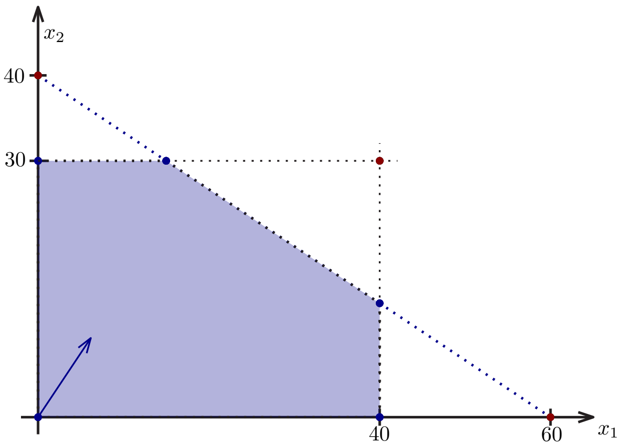
Iter. 2:$x_B^T = (x_1, x_4, x_2) = (15, 25, 30), x_N^T = (x_3, x_5) = (0, 0)$

Com isso finalizamos a análise do algoritmo Simplex. Note que ao determinarmos o caminho Simplex, temos uma forma de validar a nossa solução do quadro. Por exemplo, se em uma determinada iteração você encontra uma solução que não é um vértice, **algo deu errado**.



EXERCÍCIO Considerando o seguinte modelo de PL e a representação da sua região factível, responda o que se pede:

$$
\begin{array}{rcccl}
\max z = & x_1 & +2x_2 & +x_3 & \\
 & 2x_1 & +x_2 & -x_3 & \leq 2 \\
 & 4x_1 & +x_2 & +x_3 & \leq 6 \\
 & -x_1 & -2x_2 & -x_3 & \leq 6 \\
 & x_1 & x_2 & & \geq 0
\end{array}
$$



1. É possível determinar o número máximo de soluções básicas do problema? Se sim, como?
2. Qual é a relação dessas soluções com a região representada pelas inequações?